

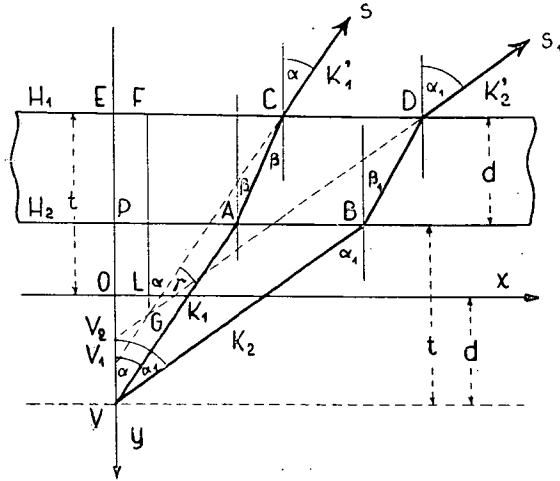
A PLANPARALLEL LEMEZ ÚJABB TULAJDONSÁGAINAK VIZSGÁLATA

írta: KEDVES MIKLÓS

A planparallel lemezen áthaladó fénysugár törése általánosan ismert. Ha a lemezen nem egy fénysugár, hanem párhuzamos sugárnyaláb halad át, akkor az áthaladás után is párhuzamos sugárnyaláb marad, csak mindegyik fénysugár önmagával párhuzamosan, azonos távolsággal tolódik el. Ha azonban, a planparallel lemezen homocentrikus sugárnyaláb megy át, akkor az áthaladás után a sugárnyaláb már nem lesz homocentrikus; a lemezből kilépő sugarak ellenkező irányú meghosszabbításai *nem a kiindulási és nem egy pontban* találkoznak. A planparallel lemez a rajta áthaladó párhuzamos sugárnyaláb tulajdonságát nem változtatja meg, elienben a homocentrikus sugárnyaláb centrikus tulajdonságát megváltoztatja. Ez az utóbbi eset fordul elő akkor, amikor megvilágított tárgyat planparallel lemezen át nézünk. A tárgy minden pontjából homocentrikus sugárnyaláb indul ki, mely a lemezen áthaladva már nem homocentrikus. Az ideghártyán minden pontról nem homocentrikus sugárnyaláb alkot képet. Vizsgáljuk meg, hogy a homocentrikus sugárnyaláb megváltozott tulajdonsága miképp módosítja a lemezen át nézett tárgyak képét, milyen lesz a kép és hol látja ezt a szem. Először csak egy világító pont képével foglalkozunk.

Az 1. ábra a planparallel lemez, és egy világító pontból kiinduló, szét-tartó sugárnyaláb síkmetszetét tünteti fel. A metsző sík a világító pont normálisan halad át. Az ábrán H_1 és H_2 a d vastagságú lemez két határfelülete, V a világító pont, melynek távolsága a H_2 felülettől $VP=t$. A világító pontból kiinduló és 180° -nál kisebb nyílásszögű sugárkúp véges határon belül esik a lemezre. A lemezzel párhuzamos síkban fekvő sugarak a ∞ -ben érik el a lemez H_2 határfelületét. Képzeljük el, hogy a világító pontból kiinduló fénysugarak különböző nyílásszögű kúpfelületeken fekszenek. Ha a VA sugárral a VP normális, mint tengely körül kúpfelületet írunk le, akkor a tengellyel α szöget bezáró sugarak, mind a K_1 kúpfelületen fekszenek. A VA sugár folytatása a lemezen való áthaladása után SC sugárrész. Ha az SC és ellenkező irányú CV_1 meghosszabbításával a tengely körül kúpfelületet írunk le, akkor a K'_1 csonkakúp felületén fekvő sugarak ellenkező irányú meghosszabbításai mind a V_1 pontban a normálison találkoznak. Tehát a K_1 kúpfelületen fekvő fénysugarak virtuális találkozási pontja a normálison V_1 . A $2\alpha_1$ nyílásszögű, K_2 kúpfelületen fekvő fénysugaraknak a lemezen való áthaladása után történt ellenkező irányú meghosszabbításai a normálison, a V_2 pontban találkoznak. Az ábrán egyszerűen igazolható, hogy a V_1 és V_2 különböző

helyen vannak a normálison. Ezek a megállapítások érvényesek a világító pontból kiinduló, minden kúpfelületen fekvő sugárnyalábra. A virtuális találkozási pontok a normális egy szakaszán helyezkednek el. A kiindulásnál az összes kúpfelület csúcspontja a világító pontban van, a planparallel lemezen való áthaladás után a virtuális csúcspontok a normálison egymásután, egy szakaszon helyezkednek el úgy, hogy minden pontban csak *egy-egy* kúpfelületen fekvő sugárnyaláb ellenkező irányú meghosszabbítása találkozik.



1. ábra.

A planparallel lemezen áthaladó és széttartó sugárnyalábnál a normálison keletkező virtuális találkozási pontokat (V_1 , V_2) nevezzük *elsőrendű* találkozási pontoknak. Az 1. ábrán látható, hogy a különböző nyílásszögű (K_1 és K_2) csonka kúpfelületen fekvő sugarak ellenkező irányú meghosszabbításai a normálison kívül is találkoznak; az SC és S_1D sugár meghosszabbítása a G pontban. Nevezzük ezeket a találkozási pontokat *másodrendű* találkozási pontoknak. Keressük ezeknek a helyét a síkban. Itt felhasználhatjuk *W. Saltzmann* [1] meg gondolásait, aki az üvegtükör mögött keletkező virtuális kép helyét kereste oly módon, hogy a kép keletkezésénél a planparallel lemez hatását is figyelembe vette. Vegyük fel a derékszögű koordináta-rendszer y tengelyét a világító ponton áthaladó normálison és az x tengelyt a világító ponttól, a H_2 felé mért d távolságra; a kezdő pont O . Az y pozitív része legyen az x tengely alatt. A G pont koordinátái az 1. ábra szerint:

$$\begin{aligned} x &= EF = EC - FC \\ y &= LG = FG - FL = FG - t. \end{aligned} \quad (1)$$

Az x és y értékeinek kiszámításához először a CD és CG távolságokat kell más adatokkal kifejezni. Az ábrából felírható:

$$\begin{aligned} CD &= ED - EC \\ CD &= (t \operatorname{tg} \alpha_1 + d \operatorname{tg} \beta_1) - (t \operatorname{tg} \alpha + d \operatorname{tg} \beta) \\ CD &= t(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha) + d(\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta). \end{aligned}$$

Átalakítások után:

$$CD = t \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha)}{\cos \alpha_1 \cos \alpha} + d \frac{\sin(\beta_1 - \beta)}{\cos \beta_1 \cos \beta}.$$

Az ábrából megállapítható, hogy az SC és S_1D sugárrész ellenkező irányú meghosszabbítása által bezárt γ szög egyenlő $\alpha_1 - \alpha$. Legyen a $\gamma = \alpha_1 - \alpha$ végtelen kicsiny és jelöljük $\delta\alpha$ -val. Így $\alpha_1 = \alpha + \delta\alpha$ és $\beta_1 = \beta + \delta\beta$. Behelyettesítések és egyszerűsítések után:

$$CD = t \frac{\sin \delta\alpha}{\cos^2 \alpha} + d \frac{\sin \delta\alpha}{\cos^2 \beta}.$$

További átalakítás és egyszerűsítés után:

$$CD = \left(\frac{t}{\cos^2 \alpha} + \frac{d}{\cos^2 \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right) \delta\alpha.$$

A fénytörés törvényéből:

$$\sin \alpha = n \sin \beta; \quad \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = \frac{\cos \alpha}{n \cos \beta}.$$

Behelyettesítés után:

$$CD = \left(\frac{t}{\cos^2 \alpha} + \frac{d \cos \alpha}{n \cos^3 \beta} \right) \delta\alpha. \quad (2)$$

Ezután a CGD háromszögből számítsuk ki CG -t.

$$CG = \frac{CD \cos \alpha_1}{\sin \gamma}.$$

Legyen $\delta\gamma = \delta\alpha = \sin \gamma$; továbbá $\cos \alpha_1 = \cos \alpha - \sin \alpha \delta\alpha$ -val. Behelyettesítések, egyszerűsítés és a végtelen kicsiny tag elhagyása után:

$$CG = \left(\frac{t}{\cos^2 \alpha} + \frac{d \cos \alpha}{n \cos^3 \beta} \right) \cos \alpha_1$$

$$CG = \frac{t}{\cos \alpha} + \frac{d \cos^2 \alpha}{n \cos^3 \beta}. \quad (3)$$

Az 1. ábra szerint:

$$FC = CG \sin \alpha.$$

CG értékét behelyettesítve és a fénytörés törvényét használva:

$$FC = t \operatorname{tg} \alpha + \frac{d \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \beta}.$$

Az 1. ábrából:

$$EC = t \operatorname{tg} \alpha + d \operatorname{tg} \beta.$$

Mivel $x = EC - FC$, ezért a behelyettesítés után:

$$x = d \operatorname{tg} \beta \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \right)$$

$\cos^2 \alpha = 1 - n^2 \sin^2 \beta$ behelyettesítése és átalakítások után:

$$x = d \operatorname{tg}^3 \beta (n^2 - 1).$$

Más formában:

$$\left(\frac{x}{d(n^2 - 1)} \right)^{\frac{2}{3}} = \operatorname{tg}^2 \beta.$$

Átalakítások után:

$$\left(\frac{x \sqrt{n^2 - 1}}{d} \right)^{\frac{2}{3}} = (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \beta. \quad (4)$$

A 4. egyenletet ebben a formában megtartva, keressünk hasonló összefüggést y -ra is. Az 1. egyenlet szerint:

$$y = FG - t.$$

Az 1. ábra szerint:

$$FG = CG \cos \alpha.$$

CG értékének behelyettesítése a 3. egyenletből:

$$FG = \left(\frac{t}{\cos \alpha} + \frac{d \cos^2 \alpha}{n \cos^3 \beta} \right) \cos \alpha.$$

Az y fenti egyenletébe FG értékét behelyettesítve és a műveletek elvégzése után:

$$y = \frac{d \cos^3 \alpha}{n \cos^3 \beta}$$

$\cos \alpha = (1 - n^2 \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}}$ behelyettesítése után:

$$y = \frac{d}{n} \left(\frac{1 - n^2 \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Behelyettesítések és rendezés után:

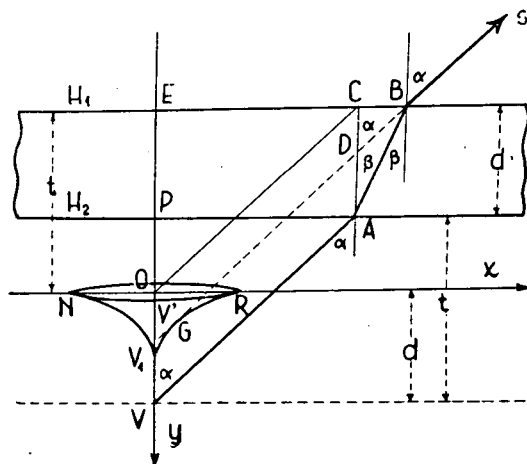
$$\left(\frac{ny}{d} \right)^{\frac{2}{3}} = 1 - (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \beta. \quad (5)$$

A 4. és 5. egyenlet összeadásából:

$$\left(\frac{x \sqrt{n^2 - 1}}{d} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{ny}{d} \right)^{\frac{2}{3}} = 1. \quad (6)$$

A 6. egyenlet ellipszis evolútájának az egyenlete. A planparallel lemezen áthaladó 180° -os nyílásszögű és a síkban fekvő sugárnyaláb ellenkező irányú meghosszabbításainak metszéspontjai alkotják az evolúta alsó felét; a 2. ábrán NV_1R . Az ábra jelzései ugyanazok, mint az 1. ábrán. A levezetés szerint az evolútát az egymással szomszédos sugarak ellenkező irányú meghosszabbításai

alkotják. Azonban a *nem szomszédos* sugaraknak is vannak találkozási pontjai, melyek az evolútán belül az NV_1R területen fekszenek; az evoluta határa a másodrendű találkozási pontoknak. Pl. a normálissal $(VE)\alpha$ -nál kisebb hajlásszöget alkotó sugarak ellenkező irányú meghosszabbításai mind metszik a $V'G$ szakaszt. Egyszerűen igazolni lehet [2], hogy a találkozási pontok ezt a területet úgy fedik, hogy minden pontban csak két-két sugár ellenkező irányú meghosszabbítása találkozik. Ezek a megállapítások érvényesek a világító pont normálisan átfektetett minden síkban levő sugárnyalábra. A találkozási pontok helyét pontosabban úgy határozhatjuk meg, hogy az összes találkozási pontok olyan forgástestben és annak felületén vannak, melyet az evoluta egyik ága (V_1R) és a féltengely (OR) a VE normális körül egy-egy körforgással hoznak létre.



2. ábra

Ebben a forgástestben a tengely kitüntetett része a testnek; ezen vannak az elsőrendű találkozási pontok, minden pontban egy egész küpfelületen fekvő sugárnyaláb ellenkező irányú meghosszabbítása találkozik; a tengelyen kívüli részben vannak a másodrendű találkozási pontok úgy, hogy a test minden pontjában — és a felületen is — csak két-két sugár meghosszabbítása találkozik. A világító pont képe tehát, a fenti tulajdonságokkal bíró forgástest, vagyis képtest.

Az evoluta egyenletének levezetésénél a tárgy távolság (t) kiesett az egyenből. Az evoluta nagysága tehát csak a lemez vastagságától és törésmutatójától függ, független a világító pont helyétől. A világító pont bárhol lehet a plan-parallel lemez mögött, a virtuális képe ugyanaz lesz. Így a világító pont feket a lemez alsó (H_2) felületén is. Ekkor azonban a világító pontból kiinduló sugarak csak egy felületen (H_1) törnek meg. Ekkor az evoluta és a vele alkotható forgástest mint képtest mindenben egyezik a „Síkfelülettel határolt fénytörő anyagokban keletkező virtuális képek,” című cikkben ismertetett eredményekkel [2]. Az evoluta egyenletébe a lemez d vastagsága helyett csak

a folyadékban levő világító pontnak a határfelületről mért távolságát kell venni. A virtuális kép további vizsgálata megegyezik a Fizikai Szemle 1956/4. számában megjelent részletes tárgyalással, azért az ott megállapított eredményeket itt rövidebben lehet összefoglalni.

A világító pont megfigyelésénél, a fény a planparallel lemezen áthaladva jut a köralakú, véges nagyságú pupillán át a szembe. A pupilla átmérője 2—6 mm. A szembe érkező sugárkúp felületének ellenkező irányú meghosszabbítása egy ékhez hasonló darabot vág ki a képtestből. Ez az ékhez hasonló test a világító pont *asztigmatikus képe*. A kép éle a tengelyen van és a hátá a forgásfelületnek egy része. Az asztigmatikus képnek is megvan az a főtulajdonsága ami a képtestnek, hogy a tengelyen levő él — az elsőrendű találkozási hely — kitüntetett része a képnek. Képzeliük el, hogy a pupillán áthaladó sugárkúp sugarai különböző nyílású kúpfelületeken fekszenek és a felületek metszik a pupilla síkját. A metszésvonalak különböző nagyságú ívek. Ezeken az íveken áthaladó sugarak ellenkező irányú meghosszabbításai az asztigmatikus kép élének egy-egy pontjában találkoznak. Vagyis minden pontban egy kisebb sugárnyaláb találkozik. Ugyanakkor a kép többi részében, a másodrendű találkozási helyeken csak két-két sugár ellenkező irányú meghosszabbítása találkozik. A pupillán áthaladó sugárkúp olyan hatást gyakorol a szemben, mintha az asztigmatikus kép éléből indulna ki, azért a szem, a világító pont normálisan látja a pont képét. Az asztigmatikus kép többi részének, a másodrendű találkozási pontoknak alárendelt szerepük van, a megfigyelésnél nem vehetők észre, mert egyenletesen szétszórva helyezkednek el az asztigmatikus kép tengelyenkívüli részében. Ezek szerint *a világító pont asztigmatikus virtuális képe egy rövid szakasz, a pont normálisan.*

Az így megállapított virtuális kép egyes pontjaiból látszólag különböző nagyságú sugárnyaláb érkezik a szembe. A pupilla síkján képzelt metszési ívek hosszától függ az egyes sugárnyalábok nagysága. Mivel a leghosszabb ív a pupilla középpontján halad át, és a hozzá hasonló nagyságú ívek ennek közelében vannak, azért látszólag a virtuális kép középső részéből érkezik legtöbb fénysugár a szembe. Továbbá, a virtuális kép látószöge $1'$ -en alul van, ezért az ideghártyán keletkező kép oly kicsiny, hogy az, egy idegvégződésre hat, ami egy pont érzetét kelti az agyban. Ezek figyelembe vételével a virtuális kép helyét úgy állapíthatjuk meg, hogy *a szem ott látja a világító pont virtuális képét, ahol a pupilla középpontján áthaladó fénysugár ellenkező irányú meghosszabbítása metszi a világító pont normálisát*. Az 1. ábrán, ha a szem S helyen van, akkor a V képe V_1 , ha az S_1 helyen van, akkor V_2 . Meg kell jegyezni, hogy ha a szem helyett más leképező rendszer szerepel, pl. mikroszkóp, akkor más a helyzet. Erről később lesz szó.

Állapítsuk meg a világító pont virtuális képének távolságát a H_2 határfelületről. A 2. ábrán a tárgy távolság: $t = VP$, a képtávolság: $-k = V'P$.

A 2. ábrából felírható:

$$k = PV - VO + OV'$$

$$k = t - d + OV'.$$

A 2. ábrán $OVAC$ parallelogramma, (melyben $OV = d$) ennek egyik része, $OV'DC$ is parallelogramma, melyben $OV' = CD$. Az OV' távolságot az ABC háromszögből határozzuk meg.

$$CB = d \operatorname{tg} \beta = CD \operatorname{tg} \alpha$$

$$CD = OV' = d \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Behelyettesítés és rendezés után:

$$k = t - d \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \right). \quad (7)$$

A világító pont képének a határfelülettől mért távolsága a szem helyétől, vagyis az α és β szögtől függ; a két szög változásától függően a kép a normálison mozog. A 7. egyenletből megállapíthatjuk a kép minimális és maximális távolságát a H_2 határfelülettől. Ha α közeledik 90° -hoz, akkor $\operatorname{tg} \beta / \operatorname{tg} \alpha$ tart a nullához, határesetben:

$$k_{\min} = t - d.$$

Ha α és β olyan kicsiny, hogy a tg függvényeik egyenlőnek vehetők a \sin függvényekkel, akkor

$$k_{\max} = t - d \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Ezek a megállapítások érvényesek a planparallel lemezen át nézett tárgy minden pontjára. A tárgy egyes pontjainak szabad szemmel történő megfigyelésénél a képek asztigmatizmusa nem vehető észre. A tárgy képe tiszta és hibátlan még akkor is, ha vastagabb ($d = 10$ cm) lemezen át nézzük a tárgyat.

A tárgy helyzete a planparallel lemezhez viszonyítva háromféle lehet: párhuzamos a határfelülettel, merőleges a határfelületre, és ferde szöget zár be a határfelülettel. A planparallel lemez használatánál csak a párhuzamos helyzetnek van jelentősége. A másik két helyzetben csak ritkán alkalmazzák; ezért csak az első helyzettel fogunk foglalkozni.

1. A tárgy párhuzamos a planparallel lemezzel

A 3. ábrán a H_1 és H_2 a d vastagságú planparallel lemez határfelülete, AB kicsiny tárgy, S a szem helye, mely az A ponton áthaladó normálison van. A szem távolsága a H_1 határfelülettől s , a H_2 határfelülettel párhuzamos tárgy távolsága a H_2 -től t . A B pontból kiinduló fénysugár mindkét határfelülettel α beesési és β törési szöget alkot. Az előző megállapítás szerint a B virtuális képe az SM meghosszabbításának és B normálisának metszéspontjában van, az ábrán B' . Kicsiny tárgy esetén úgy vehetjük, hogy a tárgy minden pontjának képe BB' távolságra van a tárgytól. Az AB tárgy szubjektív virtuális képe tehát $A'B'$, mely párhuzamos a H_2 határfelülettel; távolsága ettől: k .

Levegőben nézve a tárgyat, a látószöge $ASB \angle = \alpha$. A planparallel lemezen át nézve a virtuális kép látószöge $A'SB' \angle = \alpha$. A kép látószöge nagyobb a tárgy látószögénél, mert a tárggyal egyenlő nagyságú virtuális kép közelebb van a szemhez. A nagyítás tehát:

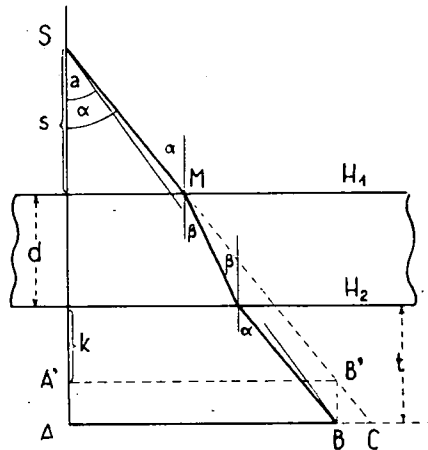
$$N = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{AC}{AS} : \frac{AB}{AS} = \frac{AC}{AB}.$$

Más jelzéssel:

$$N = \frac{K_v}{T}. \quad (8)$$

A lineáris nagyítás: a virtuális kép centrális vetülete a tárgyra (K_v), osztva a tárgy hosszával (T). A nagyítást az ASC és $A'SB'$ háromszög hasonlóságából is felírhatjuk:

$$N = \frac{s+d+t}{s+d+k}.$$



3. ábra

A k értékét a 7. egyenletből behelyettesítve:

$$N = \frac{s+t+d}{s+t+d \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}}. \quad (9)$$

Kis tárgyaknál, melyeknél a tg függvény egyenlőnek vehető a \sin függvény-nyel, a nagyítás a fénytörés törvénye szerint:

$$N = \frac{s+t+d}{s+t+\frac{d}{n}}. \quad (10)$$

Ennek az egyenletnek a számlálójában és nevezőjében is $s+t$ szerepel, tehát a nagyítás a két mennyiség összegétől függ, és független azok arányától, azért ezt az összeget egy betűvel is jelölhetjük; legyen $s+t=D$, akkor

$$N = \frac{D+d}{D+\frac{d}{n}}. \quad (11)$$

Ebből az egyenletből a nagyítás határait is megállapíthatjuk. Ha D olyan kicsiny, hogy a másik két tag mellett elhanyagolható, akkor a lineáris nagyítás egyenlő a törésmutatóval. Ha D olyan nagy, hogy mellette a másik két tag hanyagolható el, akkor a nagyítás egy. Eszerint a kicsiny tárgy nagyításának határai:

$$n \geq N \geq 1.$$

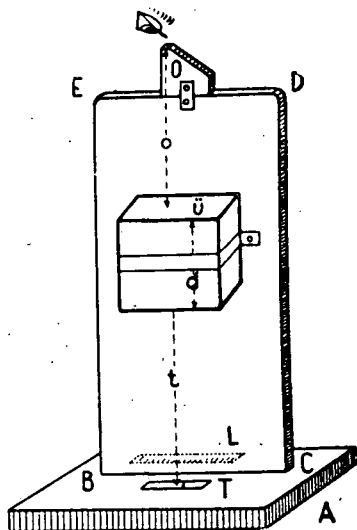
A 10. egyenlet alkalmas a törésmutató meghatározására. A 8. összefüggés szerint a nagyítás könnyen meghatározható; így a 10. egyenletben az n kivételével minden adat mérhető. A 10. egyenlet n -re megoldva:

$$n = \frac{Nd}{s+t+d-N(s+t)} \quad (12)$$

A 11. egyenlet jelölése szerint:

$$n = \frac{Nd}{D+d-ND} \quad (13)$$

Törésmutató meghatározást a 12. egyenlet szerint végezhetünk. A kísérlet azonban csak vastag lemezzel, azaz párhuzamoslapú hasábbal végezhető. Erre alkalmas az ólomüvegből készült kocka-, vagy hasábalakú használati tárgyak.



4. ábra

A kísérleteket a 4. ábrán feltüntetett, könnyen elkészíthető eszközzel végezhetjük. Vastagabb deszkából készült téglalap alakú alapba (A: $20 \times 10 \times 2$ cm), rá merőlegesen, téglalap alakú (BCDE) ragasztott lemezt ($30 \times 14 \times 0,4$ cm) erősítünk, az alap hosszával párhuzamosan, a szélesség egyharmadánál. A ragasztott lemez felső részének (ED) közepére 4 cm magas támasztót (O) erősítünk fémllemezrel. Az így elkészített eszközt feketére festjük. A mérésre szol-

gáló üveghasábót (\bar{U}) a ragasztott lemezhez erősítjük fémszalaggal; az ábrán látható módon. Az üveghasáb két lapja párhuzamos az alappal. A ($BCDE$) lemez első oldalával párhuzamosan a tárgyat (T), a másikon pedig a mm-re beosztott mérőléce (L) helyezük el az alpra. A kísérletek alkalmával fejünket az ornyeregnél a támasztóra (O) helyezük; így biztosíthatjuk a szem állandó távolságát a tárgytól. Egyik szemünkkel a tárgyat, másikkal a mérőléce nézzük. A hasábon át a tárgynak virtuális képét látjuk a tárgy és az üveghasáb alsó határfelülete között. A szem, alkalmazkodása folytán ezt a képet a mérőléce vetíti és ezen leolvashatjuk a virtuális kép centrális vetületének hosszát. A mm. törtörészet megbecsüljük. Több leolvasást végzünk és ezek középértékét vesszük, mert a szem nem alkalmazkodik mindegyik leolvasásnál egyformán.

Az első kísérlet-sorozatot négyzetes üveghasábbal (tintatartó) végeztem, melynek a szembenlevő oldallapjai kielégítő pontossággal párhuzamosak voltak: $d = 10,20$ cm ($\pm 0,27\%$). Tárgyként 2, 3, 4, 5 cm hosszú, és 2 cm széles aluminium lemezeket használtam. A kísérlet folyamán mérjük a virtuális kép vetületét; a tárgy és a képvetület hosszából kiszámítjuk a nagyítást (N), amely a törésmutatónál nem lehet nagyobb. Mérjük a tárgy és a hasáb alsó határfelülete közt a tárgytávolságot (t), úgy szintén a hasáb felső felülete és a támasztó (O) felső vége közti távolságot (o). Az o távolság azonban még nem adja meg a 12. egyenletben szereplő s távolságot. Kísérlet alatt a támasztó felső végén átfektetett vízszintes sík fölött van a cornea; ennek távolsága a síktól középértékben 1 cm-nek vehető. A szembe jutó fénynyaláb az ideghártyán alkot képet; a fénynek a szemben megtett útját is figyelembe kell venni. Szemnek az optikai tengely irányában mért átmérőjét általában 24 mm-nek vesszük. Ezek szerint a mért o távolsághoz még hozzá kell adni a cornea távolságát és a szem átmérőjének hosszát. Így $s = o + 3,4$ cm. Ez a korrekció indokolt, csak a számértéke lehet kismértékben más.

Ennél a kísérletsorozatnál a tárgy állandóan az alapon volt, a szem helye nem változott. Az üveghasáb helyét változtattam a tárgy és a szem között, vagyis a szem- és tárgytávolság aránya változott, de összegük állandó volt. A kísérleti eredményeket I. táblázat tünteti fel.

I. TÁBLÁZAT

or- szám	T cm	Kv cm	N	d cm	t cm	s cm	n
1	3	3,30	1,100	10,20	0	26,9	1,494
	4	4,41	1,102				1,506
	5	5,52	1,104				1,519
	6	6,58	1,096				1,467
2	3	3,31	1,103	10,20	8,00	18,9	1,514
	4	4,43	1,107				1,540
	5	5,53	1,106				1,535
	6	6,57	1,095				1,460
3	3	3,32	1,106	10,20	19,1	7,8	1,535
	4	4,43	1,107				1,540
	5	5,52	1,104				1,519
	6	6,58	1,096				1,467

A táblázat 3. oszlopában vannak a kísérletileg megállapított képvetületek és a 4.-ben a számított nagyítások. A kísérletek folyamán a $t+s$ értéke 26,9 cm volt. A kísérletek eredményeiből megállapítható, hogy — a kísérleti hibáktól eltekintve — a nagyítás *független* attól, hogy a planparallel lemez, a tárgy és a szem között hol van, vagyis a t és s arányától; csak azok összegétől függ. Ezek a kísérleti eredmények igazolják a II. egyenletet.

Az ismeretlen összetételű üveg törésmutatójára kapott eredményekből megállapítható, hogy s 4 és 5 cm hosszú tárggyal kapott eredmények általában a legjobbak, ezekkel egy tizedes pontossággal a törésmutató értéke többnyire megkapható. Ha a 4 és 5 cm tárggyal kapott eredmények középértékét vesszük, akkor 1,526-ot kapunk, ami jól megközelíti a 13,3%-os PbO-t tartalmazó koronaüveg 1,520 törésmutatóját. [Na 5893 Å hullámhosszal mérve 3.] Az n értékére közölt harmadik tizedes szám korrekciónak számít. A pontosság mintegy 0,3%.

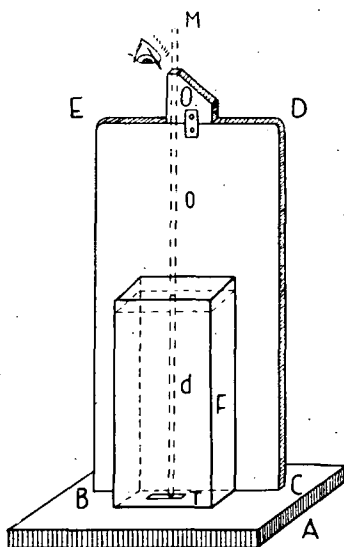
Kísérletet végeztem még egy kisebb méretű üveghasábbal (papirosnyomtató) is. A két jó párhuzamos lapjának távolsága: $d = 5,65 (\pm 0,3\%)$ cm volt. A kísérletet úgy végeztem, hogy a szem és a hasáb helye állandó volt, a tárgy helye változott. Három különböző tárgytávolságnál végeztem mérést. Az első méréseknél a tárgy az alapon volt és azután közelítettem a tárgyat és a mérőlécet a hasábhöz. A kísérleti eredményeket a II. táblázat tünteti fel.

E. TÁBLÁZAT

Sor-szám	T cm	Kv cm	N	d cm	t cm	s cm	n
1	3	3,20	1,066	5,65	17,85	13,6	1,686
	4	4,27	1,067				1,698
	5	5,32	1,064				1,651
	6	6,38	1,063				1,636
					$D = 31,45$		
2	3	3,22	1,073	5,65	13,45	13,6	1,647
	4	4,30	1,075				1,677
	5	5,36	1,072				1,632
	6	6,42	1,070				1,608
					$D = 27,05$		
3	3	3,25	1,083	5,65	9,85	13,6	1,649
	4	4,34	1,085				1,674
	5	5,43	1,086				1,685
	6	6,51	1,085				1,674
					$D = 23,45$		

A 4. oszlopban látható nagyítások szerint, ha a t értéke csökken, vagyis a tárgy közeledik a lemezhez, akkor a virtuális kép látószöge nő, ennek következtében a nagyítás is folytonosan növekszik. Ezek igazolják a nagyításra megállapított összefüggéseket. Ha a 4 és 5 cm hosszú tárgyakkal kapott törésmutatók középértékét vesszük, akkor az ismeretlen összetételű üveghasáb törésmutatója: $n = 1,669$. Ez az érték jól megközelíti az 52,6%-os PbO-t tartalmazó nehéz flint üveg 1,663 törésmutatóját. [H, 4861 Å hullámhosszal mérve, 3.] A két üveghasábbal meghatározott törésmutatók értékei minden mérésnél jól különböznek egymástól. Ezek szerint nagyobb üveghasáb a koronaüveg, a kisebb pedig a flintüveg csoportjába sorolható.

Meghatároztam a két hasáb együttes, vagyis a közös nagyítását is. Ennél a kísérletnél a tárgy az alapon volt, rajta feküdt a nagyobbik hasáb. ($t=0$.) Ebben a helyzetben határoztam meg az I. táblázat 1. sorszáma alatt található négy egyéni nagyítást. A kisebb hasáb 17,85 cm távolságban volt a tárgytól; ebben a helyzetben határoztam meg a II. táblázat 1. sorszáma alatt látható négy egyéni nagyítást. A közös nagyítás meghatározását az előbbi kísérleteknél használt négy tárggyal végeztem. A tárgyak 3—6 cm nagysága szerint a következő közös nagyításokat kaptam: 1,177; 1,172; 1,170; 1,170. Ha a két hasáb helyének megfelelő, az I. és II. táblázat 1. sorszáma alatt található egyéni nagyításokat összeszorozzuk a 3—6 sorrend szerint, akkor a következő értékeket kapjuk: 1,172; 1,175; 1,174; 1,165. A két hasáb kísérletileg meghatározott közös nagyítása megegyezik az egyéni nagyítások szorzatával: a kísérleti hibáktól eltekintve. Ebből megállapítható, hogy a közös nagyítás ugyanolyan, mint az összetett nagyítóknál, a mikroszkópoknál. Az alsó hasáb úgy szerepel mint tárgylencse, a felső hasáb pedig mint szemlencse.



5. ábra

A 4. ábrán feltüntetett kísérleti eszközt átalakíthatjuk folyadékok törésmutatójának meghatározására is. Eltávolítjuk róla az üveghasábot és az alapra téglalapokkal határolt nyitott edényt helyezünk, így az 5. ábrán látható kísérleti összeállítást kapjuk. Kísérleteket $4,5 \times 9 \times 18$ cm külső méretű 450 cm^3 ürtartalmú üvegedénnyel végeztem. (Akkumulátor-edény.) Az edény fenekére helyezük a tárgyat és az edénybe folyadékot öntünk. A folyadékréteg mint planparallel lemez szerepel. A kísérletnél szereplő távolságok lemérésére jól használható mérőeszközt készíthetünk üvegcsőből; 40 cm hosszú kb. 6 mm külső átmérőjű cső egyik végét beforrasztjuk a csőbe helyezhető vékony pálcikára milliméterpapirosból kivágott szalagot ragasztunk és azt beerősítjük a csőbe (M). Ezzel egyszerre mérhetjük a folyadékréteg vastagságát (d) és

foliadék felületétől az o távolságot; az utóbbihoz 3,4 cm korrekciót adunk. A mérőcső bemelegítésekor a folyadék felszíne alig egy mm-rel emelkedik, amit a mérésnél figyelembe vehetünk. Ennek az eszköznek az az előnye, hogy mérésakor a folyadék nem rongálja a skála beosztását. Az 5. ábrán feltüntetett készüléknél az volt a cél, hogy minél kisebb edénnyel, vagyis minél kevesebb folyadékkal végezzünk törésmutató meghatározást. Vízzel és benzollal végzett kísérletek eredményei a III. táblázatban láthatók. A törésmutató kiszámítását

III. TÁBLÁZAT

Folyadék	T cm	Kv cm	N	d cm	s cm	n
Víz	3	3,38	1,126	16,4	19,8	1,328
	4	4,51	1,127			1,330
	5	5,62	1,124			1,321
	6	6,76	1,126			1,328
Benzol	3	3,55	1,183	16,4	19,8	1,518
	4	4,73	1,182			1,514
	5	5,89	1,178			1,500
	6	7,06	1,176			1,493

a 12. egyenlettel végezzük úgy, hogy a t értéke nulla. A két folyadék rétegvastagsága és a szem távolsága is ugyanaz, a benzol nagyobb nagyítása a nagyobb törésmutató következménye, ami a 10. egyenletből is megállapítható.

A vízzel kapott törésmutatók jól megközelítik az 5893 \AA hullámhosszúságú fénysugárral megállapított $n=1,3330$ pontos értéket. A $16,5^\circ \text{ C}$ hőmérsékletű benzollal kapott értékek, jó egyezést mutatnak a 16° C különböző hullámhosszúságú fénysugárral meghatározott $1,5261 - 1,4988$ törésmutató értékekkel [3]. A törésmutató egész száma és az első tizedes pontos értéke majdnem mindig megkapható, a többi tizedesben van szórás. Mélyebb edénnyel jobb eredmények kaphatók.

A 4. és 5. ábrán feltüntetett egyszerű és házilag könnyen elkészíthető kísérleti eszköz jól használható fizikai gyakorlatokon.

Ha a planparallel lemezzel párhuzamos tárgy tetszőleges nagyságú és a szem helye is tetszőleges a lemez ellenkező oldalán, akkor a Fiz. Szem. 1956/4, (2) számában közölt levezetés szerint megállapíthatjuk a nagyítást kifejező képletet, amely a következő:

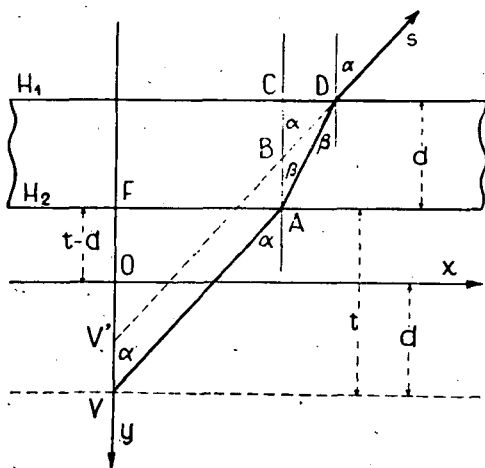
$$N = \frac{s+t+d}{s+t+d \left(\frac{\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1} \right)} \quad (14)$$

A 14. egyenletben α_1, α_2 és β_1, β_2 a tárgy két végpontjából kiinduló és a szempontban találkozó két fénysugár beesési és törési szöge; a többi betű jelentése ugyanaz, mint a 9. egyenletben. Ha α_1 és β_1 értéke nulla, akkor a 9. egyenletet kapjuk.

2. A planparallel lemez alkalmazása és hatása optikai eszközökben

A planparallel lemez virtuális képének vizsgálatánál eddig a képtávolságot (k) a lemeznek a tárgy felé eső határfelületétől mértük. (H_2). *Mérfjük a világító pont képének a távolságát magától a világító ponttól.* A 6. ábrán a világító pontból (V) kiinduló kicsiny sugárkúp, melynek tengelye VA , a lemezen való áthaladás után a V' pontban alkot virtuális képet. Ennek távolsága a világító ponttól: VV' , amely egyenlő: $t - FV'$, a H_2 felülettől mért képtávolság: k , ennek értéke:

$$k = t - d \left(1 - \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \right).$$



6. ábra

Ha a tárgytávolságból (t) levonjuk a H_2 határfelülettől mért képtávolságot, akkor megkapjuk a világító ponttól mért képtávolságot (VV'); jelöljük ezt k' -tel.

$$k' = d \left(1 - \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \right). \quad (15)$$

A 15. összefüggés szerint a világító pont képének távolsága a világító ponttól; *független a tárgytávolságtól*, függ a lemez vastagságától és a világító pontból kiinduló fénysugarak beesési és törési szögének \tan függvényétől. Vizsgáljuk meg k' határértékeit. Ha α közeledik 90° -hoz, akkor $\tan \alpha$ tart a ∞ -hez, és $\tan \beta / \tan \alpha$ tart nullához. Így k' maximuma:

$$k'_{\max} = d. \quad (16)$$

Ha α és β értéke annyira csökken, hogy a \tan függvények egyenlőknek vehetők a \sin függvényekkel, akkor k' minimuma:

$$k'_{\min} = d \left(1 - \frac{1}{n} \right). \quad (17)$$

Az α és β szög nullának nem vehető, mert akkor fizikai kép nem keletkezhet. A világító pontból kiinduló sugárkúp nyílásszögének valamilyen kis értékkel nagyobbnak kell lenni nullánál. Az ilyen kicsiny nyílásszöggel bíró sugárkúp virtuális képének a világító ponttól mért távolságát, gyakorlatilag egyenlőnek vehetjük a minimális távolsággal.

Ha a maximális képtávolságból kivonjuk a minimális képtávolságot, akkor a normálison megkapjuk azt a távolságot, melyen a világító pontból kiinduló 180° -os nyílásszögű sugárkúp virtuális képet alkot. Jelöljük ezt a távolságot C -vel.

$$C = \frac{d}{n} = \text{konstans.} \quad (18)$$

Ugyanezt az értéket kapjuk meg az evoluta egyenletéből y -ra (6), ha $x=0$ -val. A d/n állandó távolság a maximális kép hossza, amely az y tengelyen, vagyis a világító pont normálisán fekszik az x tengely alatt, az origótól mérve. Ha a d -ből kivonjuk a C -t, akkor megkapjuk a maximális kép minimális eltolódását a világító ponttól a lemez felé. Jelöljük ezt c -vel.

$$c = d \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \text{konstans.} \quad (19)$$

Ezek szerint, a planparallel lemeznek a világító pont helyétől függetlenül két állandója van: az *asztigmatikus virtuális kép maximális hossza* (C) és ennek *minimális eltolódása a világító ponttól* (c); mindkettő csak a lemez vastagságától és törésmutatójától függ. A két állandó közül a C csak 180° -os nyílásszögű sugárkúp esetén áll fenn. Ellenben a minimális eltolódás bármilyen kicsiny nyílásszögű sugárkúpnál bekövetkezik, ha a sugárkúp tengelye összeesik a világító pont normálisával.

Ha a lemezen áthaladó sugárnyaláb útjában kör alakú fényhatároló van, mint a szem pupillanyílása, vagy fényképezőgép diafragmája, akkor a fényhatárolón áthaladó sugárkúp határozza meg a leképezésnél szereplő virtuális kép hosszát és ennek eltolódását. Minden adott esetben a diafragma átmérője szabja meg a virtuális kép hosszát és a kép eltolódását pedig a sugárkúp tengelyének hajlásszöge a normálissal.

Felmerülhet az a kérdés, hogy a világító pontnak miért nincs virtuális képe a normálisnak $t=d$ szakaszán és hogyan lehet ezt igazolni. A 6. ábrán ez a távolság FO . A világító pontból (V) kiinduló VA sugár A és D pontnál megtörve halad át a lemezen. A D pontnál kilépő sugárrész ellenkező irányú meghosszabbítása a V' pontban metszi a világító pont normálisát; ebben az esetben V' a virtuális kép. A világító ponttól mért távolsága $VV' = k'$. A $VV'AB$ négyszög paralelogramma, melyben $k' = AB$ -vel. Az s sugárrész ellenkező irányú meghosszabbítása a lemez d vastagságát két részre osztja, AB és BC részre. A lemez vastagságának A része egyenlő a virtuális kép távolságával, vagyis a k' csak egy része a d -nek. Ha α és β növekszik, akkor $AB = k'$ is nő, ellenben a BC csökken, összegük mindig d . Ha α közeledik 90° -hoz, akkor az AB tart a d -hez és BC pedig nullához.

Határesetben:

$$AB = d = k' \quad \text{és} \quad BC = 0.$$

Eszerint a világító pontnak a $t-d$ (OF) szakaszon nincs és nem is lehet virtuális képe, mert ha $\alpha > 90^\circ$ -nál, akkor a világító pontból kiinduló ilyen fénysugár nem halad át a lemezen. Ha α állandóan csökken, akkor CB tart d -hez, és AB a nullához. Határesetben:

$$CB = d \text{ és } AB = 0.$$

Ennél a határesetnél, amikor $\alpha = 0$ -val, fizikai kép már nem keletkezik.

Ha a világító pont a VA sugár mentén közeledik a lemezhez, akkor a VA és V'B távolság állandóan csökken, ellenben az AB és VV' képtávolság változatlan marad. Ha a világító pont az A pontba jut, amikor a VA és V'B értéke nulla, akkor a fénysugár csak a H_1 határfelületen egyszer törik meg, a képtávolság (AB) akkor is ugyanaz marad. Ez a határeset, az egy síkfelülettel határolt fénytörő anyagokban keletkező virtuális képet adja [2], amely speciális esete a planparallel lemeznél keletkező képeknek. Ha a világító pont ellenkező irányban az AV sugár meghosszabbításán távolodik a lemeztől, akkor az AV és DV' állandóan növekszik, ezzel szemben az AB és VV' = k' mindig ugyanaz marad. Ez a helyzet változatlan a végtelenig. Ezzel geometriailag is igazoltuk, hogy a világító ponttól mért képtávolság és a planparallel lemez két állandója miért független a világító pont helyétől. Ezek után vizsgáljuk meg, hogy a planparallel lemez két állandója (C, c) milyen módon szerepel és milyen hatásokat hoznak létre a lemez különböző alkalmazásainál.

a) *Törésmutató meghatározás mikroszkóppal.* Mikroszkóppal a planparallel lemez mindkét állandóját meghatározhatjuk és ezek alapján számíthatjuk a törésmutatót. 1. A minimális eltolódás (c) használatával következőleg végezzük a kísérletet. Üveglemezre kis karcolást készítünk, mikroszkópba helyezük és a karcolás képét élesre állítjuk. Ráhelyezzük azt a lemezt, melynek vastagságát előzőleg lemértük (d) és törésmutatóját meg akarjuk határozni; ezen át, a tubus elmozdításával ismét élesre állítjuk a karcolás képét. A tubus elmozdítása után leolvasott távolság a c. A c egyenletéből (19) számíthatjuk a törésmutatót.

$$n = \frac{d}{d-c}. \quad (20)$$

Ennél a kísérletnél a törésmutató meghatározására használt lemez sértetlen marad.

A 2. kísérletnél, annak a lemeznek a két oldalára, — melynek a törésmutatóját meg akarjuk határozni — egymást keresztező két vonalat karcolunk. Mikroszkópba helyezve, először a felső és utána az alsó karcolás képét állítjuk be élesre. A tubus elmozdításakor lemért távolság a virtuális kép maximális hossza, mert a lemez felső felületétől, a minimális eltolódás felső végéig mért távolság a C. Így a 18. egyenletből számíthatjuk a törésmutatót:

$$n = \frac{d}{C}. \quad (21)$$

Ezeknél a kísérleteknél, a lemez kis nagyítása miatt az asztigmatizmus nem hat zavarólag. Ajánlatos a lemez mindkét állandóját megmérni. A kettő összegének a lemez vastagságát kell adni. Ezt összehasonlítva a mikrométerrel mért vastagsággal, a kettőnek egyezni kell. Így ellenőrizhetjük, hogy a

mikroszkóp mikrométerén feltüntetett skála adata pontos-e, vagy nem. Előfordul az is, hogy a mikroszkóp mikrométerével mérhető távolság különböző helyein más és más adatokat kapunk. Karcolás helyett, gombfesték híg oldattal készített bevonattal is végezhetjük a kísérletet.

b) *Fedőlemez-hatás.* A planparallel lemez asztigmatikus hatását, — nagyon különös —, hogy vékony lemeznél, a mikroszkópi vizsgálatoknál használt fedőlemezeknél figyelték meg. *Amici* (1892) vette először észre, hogy nagynagyítású száraz mikroszkópi vizsgálatnál a fedőlemez rontja a mikroszkópi kép jóságát. Ezt, a gömbi eltéréshez hasonló képrontásnak minősítették. Vizsgáljuk meg a fedőlemez hatását, a planparallel lemeznek az előzőekben megállapított tulajdonságai alapján. Vegyük a vizsgálandó tárgynak azt a pontját, amely az optikai tengelyen fekszik. Ebből homocentrikus széttartó sugárkúp indul ki, melynek egy része a tárgylencsén át a tubusba jut. A tubusba jutó sugárkúp nagyságát minden esetben a használt tárgylencse belépési diafragmája határozza meg. A belépő sugárkúp nagyságát a kiindulásnál szereplő nyílásszöggel fejezik ki, amely kétszerese annak a szögnek, amelyet a világító pont normálisa, a kúpfelületen levő sugarak egyikével zár be.

Számítsuk ki 144° -os nyílásszög esetén, a 0,18 mm vastag, 1,5 törésmutatójú fedőlemez virtuális képének a hosszát, és a kép minimális eltolódását. A 17. összefüggés szerint az asztigmatikus kép minimális eltolódása 0,06 mm; ezt az eltolódást a tubus elmozdításával ki lehet küszöbölni. Ezután következő asztigmatikus virtuális kép hossza, mely a 15. egyenlet szerint kiszámítva, 0,0720 mm. Eszerint, az optikai tengelyen levő világító pontból kiinduló homocentrikus sugárkúp a fedőlemezen való áthaladás után úgy lép be a tárgylencsébe, mintha 0,0720 mm hosszúságú vonalszerű tárgyból indult volna ki. A tengelyen kívül, a látómezőben levő tárgypontok virtuális képének eltolódása és nagysága különböző lesz. Az egy síkban fekvő tárgypontok helyett, különböző elmozdulású és nagyságú, látszólagos vonalszerű tárgyakból érkező sugárnyalábok lépnek be a tárgylencsébe. Az egysíkban való leképezésnél ez zavart okoz, főképpen nagynagyítású száraz mikroszkópi vizsgálatnál. A mikroszkópi kép elmosódott lesz. Ezek szerint, a fedőlemez képrontó hatását, a lemez asztigmatikus tulajdonsága okozza.

Amici a fedőlemez hatását úgy küszöbölte ki, hogy a tárgylencsét adott vastagságú és törésmutatójú fedőlemezre korrigálta [5]. *Ross* (1837) ezzel a kérdéssel behatóan foglalkozva, olyan tárgylencsefoglalatot készített, melynek a frontlencséjét az optikai tengely irányába el lehet mozdtítani és így különböző vastagságú fedőlemezekre lehetett korrigálni a tárgylencsét. Ennek az volt a hátránya, hogy a frontlencse elmozdítása után a tubust is állítani kellett. *Wenham* [6] olyan tárgylencsefoglalatot készített, melynél a lencserendszer hátsó lencséjének elmozdításával lehetett a korrekciót elvégezni. A mikroszkópokat készítő gyárak [pl. a Zeiss, 6] ezt a megoldást vették át gyártásra és a tárgylencse foglalátát egyideig úgy készítették, hogy a foglalaton egy gyűrű elforgatásával lehetett a korrekciót beállítani; a gyűrű alatt levő, és a fedőlemez vastagságát feltüntető skála szerint. A fedőlemez vastagságát talpra erősített mikrométerrel mérték. A mikroszkópi vizsgálatnak ez a módja kissé hosszadalmas volt, azért a gyárak áttértek olyan tárgylencsék gyártására, melyek normális, azaz 0,16—0,18 mm vastagságú fedőlemezekre vannak korrigálva. A vevők kívánságára a gyárak közlik, hogy egyes lencsék pontosan milyen vastagságú fedőlemezekre vannak javítva. Így a fedőlemezt készítő gyá-

rakra hárul az a feladat, hogy normál vastagságú fedőlemezt készítsenek. Egyes gyárak a lemez méreteinél a vastagságot is feltüntetik. Viszont vannak forgalomban olyan fedőlemezek is, melyeknél egy dobozban (50 db) néha kevés normálvastagságú lemez található.

Az olajimmerziós vizsgálatoknál a fedőlemez hatása eltűnik, mert a készítményt rögzítő kanadabalzsam törésmutatója 1,5, a cédrusolaj törésmutatója 1,51, ha a fedőlemez és a frontlencse törésmutatója 1,5, akkor a vizsgált tárgyból kiinduló fénysugarak gyakorlatilag homogén közegben haladnak a leképező rendszerig. Az olajimmerzió nemcsak a mikroszkópi kép fényerősségét növeli, hanem a fedőlemez asztigmatikus hatását is megszünteti.

c) *Fényszűrő hatása.* A fényképezőgépeknél használt fényszűrőknek, mint planparallel lemezeknek a hatását már régebben ismerik. Ha fényszűrő nélkül beállított fényképező lencséje elé fényszűrőt helyeznek, akkor a kép élessége csökken. A lencsét utána kell állítani. Az erre vonatkozó megállapításokat Sevcsik J. könyvéből [7] idézem. "Az objektív mögött elhelyezett színszűrő vastagságának egyharmadával hátrább viszi a képet (például 3 mm vastag színszűrőnél az eltolódás 1 mm). Ha éles képet akarunk kapni, a kihúzatot ennek megfelelően meg kell hosszabbítani, vagy a beállítást színszűrővel végezni. Objektív elé tett színszűrőnél a tárgy távolságot kell ugyanennyivel megváltoztatni." Az idézetből megállapítható, hogy itt a planparallel lemez virtuális képének az eltolódása szerepel, mint zavaró tényező. Az a javítás, mellyel a hibát ki lehet küszöbölni, pontosan egyezik a 19. összefüggésből számított minimális eltolódással. Ha a lemez vastagsága 3 mm és a törésmutatója 1,5, akkor a minimális eltolódás 1 mm. A hiba elkerülésének gyakorlati megoldása az említett eljárás, hogy a fényképezőgép beállítását fényszűrővel kell végezni.

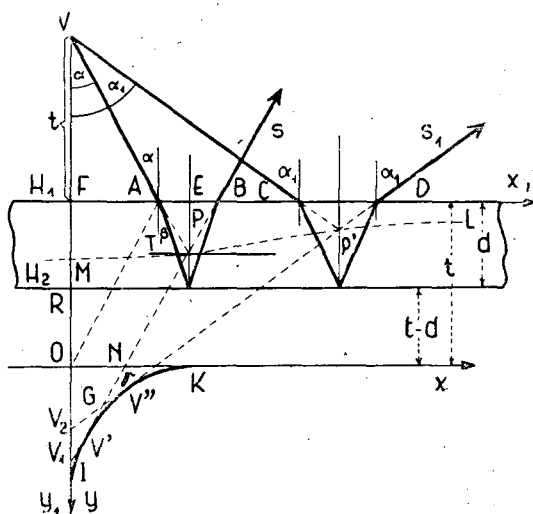
A planparallel lemez asztigmatikus hatása azért nem rontja a kép élességét, mert a távolabbi tárgyak egyes pontjaiból kiinduló, a fényszűrőn és a lencse diafragmáján áthaladó sugárkúp virtuális képének a hossza olyan kicsiny, hogy a leképezésnél az nem okoz észrevehető hibát. Pl. az optikai tengelyen egy m távolságban levő világító pontból kiinduló és 3 mm vastag fényszűrőn, 1 cm átmérőjű diafragmán áthaladó sugárkúp virtuális képének a hossza 0,0007 mm. Ehhez hozzájárul még az is, hogy a felvett kép sokkal kisebb mint a tárgy.

A fényképezésnél előfordul olyan eset is, amikor a fényszűrőknél jóval vastagabb planparallel lemezen át történik a fényképezés, mint a Wilson *kamaráknál*. Itt a tárgy aránylag közel van a fényképezőgéphez, a felvett kép nagysága közel egyenlő a tárgy nagyságával, a diafragma rendszeren nagy; ezek együttes hatásának az lehet a következménye, hogy az eltolódáson kívül a lemez asztigmatikus képrontó hatása is fellép. Valószínű, hogy a kamarát elzáró planparallel lemezre korrigált fényképezőlencsével javítani lehetne a Wilson kamarában lefolyó jelenségekről készített fényképeket.

d) *Síktükör alkalmazása.* A különböző eszközökben alkalmazott síktükörknél is fellép a planparallel lemez zavaró hatása. Itt még nagyobb mértékben, mert a kétszeri törés és egy visszaverődés következtében a planparallel lemez két állandójának nagysága kétszeres lesz. Ennek kiküszöbölésére a síktüköröket úgy készítik, hogy az üveglemezre vitt fémréteget csiszolják ki tükörnek és használatakor a fény ezen az elülső, egyszerű fémtükörön verődik vissza. A planparallel lemez csak hordozója a fémtükörnek.

Ilyen tükröt alkalmaznak az episzkópus vetítőgépeken, a tükörreflekseszes fényképezőgépekben [8] fénymutatók finom analitikai mérlegekben, és egyéb műszerekben.

e) *Üvegtükör virtuális képe.* A gyakorlati életben használt üvegtükrök közül a síktükör olyan összetett tükör, amely planparallel lemezből és a rávitt fémrétegből, vagyis fémtükröből van összetéve. Az üveglemez módosítja az egyszerű tükrökre megállapított törvényeket. A lemeznek ezt a módosító hatását a síktükör törvényeinek tárgyalásánál általában nem vesszük figyelembe. Az üvegtükör mögött keletkező virtuális képpel W. Saltzmann [1] foglalkozott, az üveglemez hatásának figyelembevételével. Saltzmann két képet állapított meg; egyik a planparallel lemez szabad felületén, a másik a lemezt fedő fémrétegen történő fényvisszaverődés folytán keletkezik. Az első kép gyenge és a tükröződésnél nincs jelentősége. Egy világító pont második képére azt állapította meg, hogy az csak kivételes esetben fekszik a világító pont normálisának a meghosszabbításán, rendszeren azon kívül, az ellipszis evolútáján fekszik.



7. ábra

Saltzmann vizsgálatát a 7. ábra tünteti fel. Ezen H_1 és H_2 a d vastagságú planparallel üveglemez két határfelülete; H_2 -ön van a fémréteg. A V világító pont távolsága a H_1 felülettől; $VF=t$, $FO=t$. Az O ponton halad át a derékszögű koordináta-rendszer x tengelye, az y tengely pedig a világító pont normálisán. A világító pontból kiinduló két fénysugár (VA, VC) kétszeres töréssel verődik vissza. A visszavert s és s_1 sugárrész ellenkező irányú meghosszabbításai a G pontban metszik egymást. Saltzmann szerint a G pont a V világító pont virtuális képe. Ha az s és s_1 sugárrész egymással alkotott γ szöge végtelen kicsiny, akkor mint szomszédos sugarak metszik egymást a G pontban. A síkban fekvő teljes sugárnyaláb szomszédos sugaraival alkotott metszéspontok képezik az x, y koordináta rendszerben az evolútának az

x tengely alatti részét. Ha a szem, az F pont, mint középpont körül körpályán mozog a síkban, akkor a világító pont képét az evolútán látja mozogni (V' , V''). Saltzmann ezzel a megállapítással be is fejezte vizsgálatát, amely csak egy része a helyes megoldásnak. Nem vette figyelembe azt, hogy a nem szomszédos sugaraknak az evoluta területén is vannak metszéspontjai, továbbá azt a lényeges adottságot, hogy véges nagyságú és nem a metszősíkban fekvő pupilla esetén a képalkotáskor nemcsak egy síkban fekvő sugarak haladnak át a pupillán, hanem térszögben elhelyezkedő sugárkúp. Ennek figyelembe vételével az ilyen kérdések vizsgálatánál — mint előbb is — első sorban térgeometriai módszert kell alkalmazni, kiegészítve az analitikai módszerrel. A kettő együtt adja a teljes és helyes megoldást.

Ha VA sugárrésszel a VF egyenes, mint tengely körül kúpfelületet írunk le, akkor ezen a felületen fekvő sugarak kétszeres töréssel verődnek vissza. A lemezből kilépő sugárrészek (s) ellenkező irányú meghosszabbításai mind a V_1 pontban találkoznak. Ez a megállapítás érvényes a világító pontból kiinduló és a tükrre eső minden sugárkúpra. A sugárkúpok csúcspontjait nevezzük *elsőrendű* találkozási pontoknak; ezek a világító pont normálisának a meghosszabbításán fekszenek. Ezen kívül az egysíkban fekvő sugaraknak a normálison kívül is vannak találkozási pontjai; ezek a *másodrendű* találkozási pontok, melyek az x tengely alatt az evoluta területén fekszenek. Az evoluta egyenlete Saltzmann megállapítása szerint:

$$\left(\frac{x\sqrt{n^2-1}}{2d}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{ny}{2d}\right)^{\frac{2}{3}} = 1. \quad (22)$$

Ez az egyenlet, csak annyiban különbözik a 6. egyenlettől, hogy a nevezőben d helyett, $2d$ van. Ennek az oka az, hogy az üvegtükrön visszaverődő sugaraknak kétszer akkora a párhuzamos eltolódása, mint a planparallel lemezen áthaladó sugaraké.

Ha az evoluta IK részével és OK szakasszal az y tengely körül forgástestet hozunk létre, akkor ez lesz a V világító pont virtuális képe, melyet a tükrre eső sugárnyaláb alkot. Ennek a tulajdonsága mindenbe egyezik a planparallel lemeznél keletkező képtesttel, csak a két tengelyének hossza kétszerese az előbbinek. A virtuális kép helyére, a planparallel lemeznél megállapított szabály lényegileg itt is érvényes. A *világító pont virtuális képe a tükr mögött ott van, ahol a szembe jutó sugárkúp tengelyének meghosszabbítása metszi a világító pont normálisát*. Ha a szembe jutó sugárkúp tengelye s , akkor a világító pont képe V_1 ; s_1 esetén V_2 . Ez a megállapítás érvényes a megvilágított test minden pontjára.

Állapítsuk meg a világító pontnak, mint tárgynak a tárgy- és képtávolságát. A 7. ábrán $ABON$ parallelogramma. Ebben

$$ON = AB = 2AE$$

AEP és ONV_1 hasonló háromszögek; oldalaik aránya: 1:2-höz, ezért

$$OV_1 = 2EP; \text{ és } EP = d \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$OV_1 = 2d \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Ha a tárgy- és képtávolságot az elülső, H_1 felülettől mérjük, akkor a képtávolság, FV_1 *nagyobb*, mint a tárgytávolság, VF .

$$t + 2d \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} > t.$$

Ha a lemez hátsó, H_2 felületétől mérjük a két távolságot, akkor a képtávolság, RV_1 *kisebb*, mint a tárgytávolság, VR .

$$t - d + 2d \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} < t + d.$$

Ezekből megállapíthatjuk, hogy a planparallel lemezben kell olyan felületnek lenni, amelyre vonatkozólag a tárgy- és képtávolság egyenlő.

A VA fénysugár *kétszeres töréssel* úgy verődik vissza, mintha a P ponton áthelyezett, a felülettel párhuzamos fémtükörön (T) *törés nélkül* verődne vissza. Keressük erre a képzelt visszaverő felületre vonatkozólag a tárgy (t')- és képtávolságot (k').

$$t' = t + d \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$$

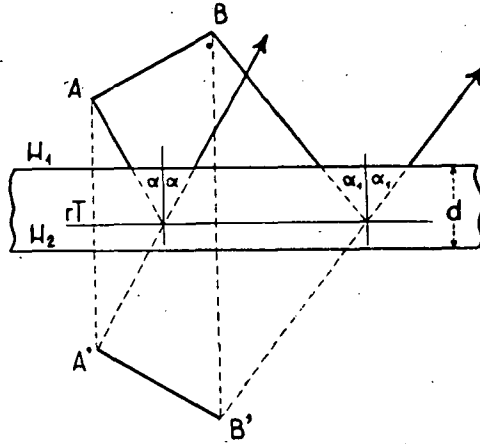
$$k' = d - d \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} + (t - d) + 2d \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = t + d \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Erre a képzelt egyszerű tükörré tehát a kép- és tárgytávolság egyenlő. Ha az üvegtükörré eső minden fénysugárra, a határfelülettől (H_1) mért képzetes visszaverődési pont távolsága (EP) ugyanaz volna, akkor az üvegtükör tükrözési jelenségeinek vizsgálatánál, az üvegtükört egy egyszerű képzetes síktükörrel lehetne helyettesíteni. De az EP fenti értékéből látható, hogy ez a távolság a beesési és törési szögektől függ. Keressük meg a P pontok leelőhelyét. Derékszögű koordináta-rendszer y_1 tengelyét vegyük fel a világitó pont normálisán, és az x_1 tengelyt a határfelületen (H_1). A P pontok leelőhelye a következő egyenlettel megadott görbe [9].

$$x_1^2 y_1^2 (n^2 - 1) - (t - y_1^2) (d^2 - n^2 y_1^2) = 0. \quad (23)$$

Az egyenletben szereplő betűk jelentése ugyanaz mint előbb. A 23. egyenlettel megadott negyedrendű görbe az ellipszis konchoidja, amely két ágból áll. Az egyik az x_1 tengely fölött, a másik alatta van, ez utóbbinak (ML) van csak fizikai jelentése. A görbe minimális pontja M , — ennek távolsága a határfelülettől: $FM = d/n$, — innen szimmetrikusan közeledik a határfelülethez, inflexiós pontot alkotva, a végtelenben érinti a felületet. Ha a konchoid alsó ágával az y_1 tengelye körül forgásfelületet létesítünk, akkor ez megközelítőleg tányér határfelületéhez hasonló. Ez a görbe felület, mint egyszerű tükör nem helyettesítheti az üvegtükört. Alakítsuk át ezt a görbe felületet olyan síkfelületté, amely párhuzamos a határfelülettel (H_1) és a minimális ponton (M) halad át, — nevezzük ezt az *üvegtükör redukált felületének* (rT). A redukált tükörfelület a tükrözési jelenségeknél helyettesítheti az üvegtükört; erre érvényesek az egyszerű tükörré megállapított törvények, és ezzel az üvegtükör mögött keletkező virtuális képet jó megközelítéssel fénytörés nélkül szerkeszthetjük; különösen kis beesési szögeknél.

A 8. ábra az üvegtükör síkmetszetét tünteti fel, melyen H_1 és H_2 a d vastagságú planparallel lemez két határfelülete, rT a redukált tükörfelület; az üveglemez törésmutatója 1,5. AB tárgy, melynek virtuális képe $A'B'$; a kép a redukált tükörfelületre, az egyszerű tükör törvénye szerint szerkesztve.



8. ábra

Az üvegtükör képének vizsgálatánál kapott két görbe között a következő kapcsolatot lehet kimutatni. A 22. egyenlettel megadott evoluta evolvensének egyenlete *Saltzman* szerint:

$$\left(\frac{x}{2dn}\right)^2 + \left(\frac{y}{2d\sqrt{n^2-1}}\right)^2 = 1. \quad (24)$$

Ha a 23. egyenletben a tárgytávolság (t) nulla, vagyis a világító pont a határfelületen van, akkor a konchoid ellipszissé zsugorodik össze; ennek egyenlete:

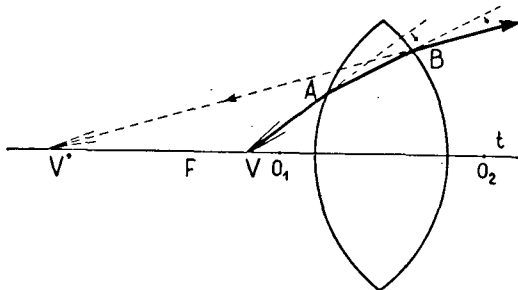
$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{d}{\sqrt{n^2-1}}\right)^2} + \frac{y_1^2}{\left(\frac{d}{n}\right)^2} = 1. \quad (25)$$

Ez az ellipszis a konchoid karakterisztikus görbéje, melyből a konchoid megszerkeszthető, ha $t > 0$. Az evolutának és a konchoidnak is az alapgörbéje ellipszis. Mindkét egyenletben az állandók a planparallel lemez adatai, különböző összefüggésben. Ugyanabban a derékszögű koordináta-rendszerben a két ellipszis nagy és kis tengelye merőleges egymásra. Az evoluta ellipszisének

mindkét tengelye $2n(n^2-1)^{\frac{1}{2}}$ -szer nagyobb, mint a konchoid ellipszisének a két tengelye. A hányados csak az üveg törésmutatójától függ.

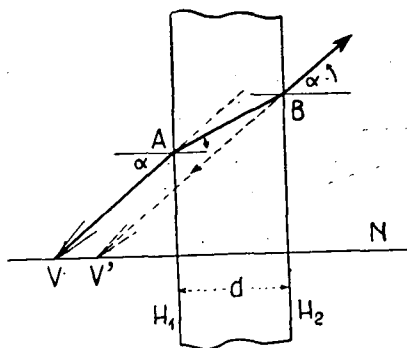
3. A planparallel lemez mint lencse

A sík-domború és a sík-homorú lencsék egyik görbületi sugara végtelen nagy. A síkfelületet végtelen nagy sugarú gömbnek lehet tekinteni. Ha a másik görbületi sugár is végtelen nagy lesz, akkor a planparallel lemezhez jutunk, mint olyan lencséhez, melynek mindkét görbületi sugara végtelen nagy. A gömbfelületű lencséknel a görbületi sugár és fókusz alapján megállapított törvények és szabályok a planparallel lemezre érvényüket veszítik. Kérdés, hogy a planparallel lemeznek a képalkotása milyen viszonyban van a lencsék képalkotásával. Ezt úgy állapíthatjuk meg, hogy ha a lemez képalkotását összehasonlítjuk valamelyik lencse képalkotásával. A planparallel lemez virtuális képe a lupé képéhez áll legközelebb.



9. ábra

A 9. ábra kétszer-domború lencse síkmetszetét tünteti fel. A fókusz F , az optikai tengely t . A fókuszon belül levő világító pontból (V) kiinduló kicsiny sugárkúp VA tengelye a lencse A pontjában megtörik. A megtört rész az optikai tengely felé hajlik. A lencse B pontjából kilépő sugár rész szintén az optikai tengely felé fordul. Tehát a lupén áthaladó fénysugár mindkét törésénél egyértelműen fordul el, és az optikai tengely felé tart. A világító pont virtuális képe a tengelyen V' .



10. ábra

A 10. ábrán H_1 és H_2 a planparallel lemez két határfelülete, V , világító pont, ezen áthaladó normális N . A világító pontból kiinduló kicsiny sugárkúp tengelye VA , amely az A pontban úgy törik, mint a lencsénél, a normális felé hajlik. A B pontból kilépő sugárrész elfordulása azonban *ellenkező* irányban történik, nem úgy mint a lencsénél; ebben különbözik a kettő egymástól. Mivel a két töréspontnál, a két ellenkező irányú elfordulási szög egyenlő, azért a lemez előtt és az utána levő sugárrész hajlásszöge a normálishoz nem változik; így jön létre a párhuzamos eltolódás. Itt a kétszeres törés folytán nem következik be a fénysugárnak a normálishoz való hajlása. A világító pont virtuális képe a normálison V' . Itt a normális szerepel az optikai tengely helyett.

A lupé és a planparallel lemez képalkotása lényegében megegyezik egymással, mert mindkettőnél a második törés után kilépő és széttartó sugárnyalábot egyesíti a szem virtuális képpé. Különbség a lencse és a lemez virtuális képének a helye és a nagysága között van. A lencsénél, a fénysugár egyértelmű elfordulása miatt a kép — a lencsétől nézve — a tárgy mögött keletkezik és nagyobb a tárgynál. A tárgy helyétől és a lencse adataitól függően meghatározott helye van, látószöge nagyobb mint a tárgyé; ennek következménye a nagyítása. A planparallel lemeznél az ellenkező, de egyenlő nagyságú sugárelfordulás következménye az, hogy a virtuális kép a lemez és a tárgy között keletkezik és a nagysága egyenlő a tárgy hosszával. A lemezhez való közeledésnek következménye a látószög növekedés és a nagyítás.

Végeredményben, a planparallel lemezen áthaladó fénysugár párhuzamos eltolódása alkalmazva homocentrikus sugárnyalábra, adta a vizsgálat folyamán kapott eredményeket.

Ha a planparallel lemezt gömbhéjjá alakítjuk, akkor olyan fénytörő testet kapunk, melynek jellemző adata az, hogy a határoló két gömbfelület középpontja egybeesik. A gömbhéj, a belső átmérője határára belül szórólencse, a héj vastagsága területén gyűjtőlencse tulajdonságot mutat. Ugyanezt a tulajdonságot mutatja a fél gömbhéj is. A gyakorlatban ismert óraüveg, mely a gömbhéjnak egy kisebb része, szórólencse tulajdonsággal bír. Vékonyága és nagy görbületi sugara miatt a szórása nem feltűnő. Egy irányba görbitett planparallel lemez az üvegcső. Ezen jól megfigyelhető az egyirányú kicsinyítés, a csőfal vastagságától függő nagyítás nem észlelhető, mert a belső átmérő rendszeren sokkal nagyobb, mint a cső falának a vastagsága [10].

IRODALOM

- [1] W. Saltzmann: Über die Lage der mehrfachen Bilder welche belegte, ebene Glasspiegel geben, (Zeitschrift für den Physikalischen u. Chemischen Unterricht, IV. évf. 1891, p. 189—191).
- [2] Kedves M.: Síkfelülettel határolt fénytörő anyagokban keletkező virtuális képek, (Fizikai Szemle, VI. évf. 1956, p. 129—137).
- [3] Landolt-Börnstein: Physikalisch-Chemische Tabellen. Berlin, 1905, pp. 861.
- [4] Walter L.: A mikroszkóp és kezelése. Budapest, 1931, pp. 255.
- [5] C. Mez: Das Mikroskop und seine Anwendung. Berlin, 1908, pp. 444.
- [6] A. Winkelmann: Handbuch der Physik. Band VI. Optik. Leipzig, 1906, pp. 1404.
- [7] Sevcsik J.: A fényképezés; elméleti és gyakorlati kézikönyv. Budapest, 1943, pp. 430.
- [8] Barabás J.—Gróh Gy.: A fényképezés kézikönyve. Budapest, 1955, pp. 321.

- [9] *Kedves M.*: Törékes fényviszszaverődés, (Math. Phys. Lap. 1924, p. 30—40).
 [10] *Kedves M.*: Fénytörés és egyéb jelenségek üvegcsőben, (Fizikai Szemle III. évf. 1953, p. 153—156).

ИЗУЧЕНИЕ НОВЫХ СВОЙСТВ ПЛАНПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПЛАСТИКИ

М. Кедвеш

Исследование исходит из того, что мы пропускаем через планпараллельную пластину гомоцентрический пучок лучей. Удлинения в противоположном направлении преломленных лучей, выходящих из пластинки, встречаются не в одном и не в исходном пункте. Глаз, находящийся в пути расходящего пучка лучей, видит светящийся пункт не на исходном месте, но в месте встречи удлинений в противоположном направлении выходящих из пластинки лучей, как виртуальную картину. Последняя находится на нормали светящегося пункта, между пластинкой и светящимся пунктом.

Если смотреть через планпараллельную пластинку освещенный предмет, то это установление относится ко всем пунктам предмета. Видна виртуальная, совпадающая с предметом картина предмета между предметом и пластинкой. Виртуальную картину, приближающуюся к пластинке, мы видим увеличено из-за увеличения угла зрения. Увеличение пластинки: центральная проекция на предмет виртуальной картины, делена на длину предмета (8). Увеличение измеряется легко (рис. 4), и показатель преломления вычисляется посредством измерения данных. (10. I, II.).

Если расстояние виртуальной картины измеряется не от пластинки, а от светящегося пункта, то можно установить максимальную длину (18) виртуальной картины светящегося пункта и ее минимальный сдвиг (19). Эти два результата зависят от толщины и показателя преломления, и являются постоянными для всех пластинок. Эти две постоянных играют роль при различных применениях планпараллельной пластинки, например при микроскопическом исследовании покрывающая пластинка, при фотографировании светочувствительный, у стеклянных зеркал стеклянная пластинка.

UNTERSUCHUNG NEUERER EIGENSCHAFTEN DER PLANPARALLELEN PLATTE

von

M. KEDVES

Der Ausgangspunkt der Untersuchungen ist, daß durch die planparallele Platte ein homozentrisches Strahlenbündel durchgelassen wird. Die in entgegengesetzter Richtung laufenden Verlängerungen der aus der Platte hervortretenden gebrochenen Strahlen treffen sich nicht im Ausgangspunkt, und treffen sich nicht in einem Punkt. Das im Wege des divergierenden Strahlenbündels befindliche Auge sieht den leuchtenden Punkt nicht im Ausgangspunkt, sondern im Treffpunkt der in entgegengesetzter Richtung laufenden Verlängerungen der aus der Platte austretenden Strahlen, als astigmatisches, virtuelles Bild. Das virtuelle Bild befindet sich auf der Normale des leuchtenden Punktes, zwischen der Platte und dem leuchtenden Punkt.

Wenn man einen beleuchteten Gegenstand durch die Platte betrachtet, dann gilt die obige Feststellung für jeden einzelnen Punkt des Gegenstandes. Das virtuelle Bild des Gegenstandes ist zwischen dem Gegenstand selbst und der Platte zu sehen, und ist mit dem Gegenstand gleich. Das sich der Platte nähernde virtuelle Bild sieht man des größer werdenden Schwinkels wegen vergrößert. Die subjektive Vergrößerung der Platte ist: die zentrale Projektion des virtuellen Bildes auf den Gegenstand, dividiert durch die Länge des Gegenstands (8). Die Vergrößerung kann leicht gemessen werden (Abb. 4), und aus dem Maß der dort

vorkommenden Daten kann der Brechungsindex der Platte errechnet werden (10., I., II. Tabelle).

Wenn man die Entfernung des virtuellen Bildes nicht von der Platte, sondern vom leuchtenden Punkt aus mißt, kann man die maximale Länge der virtuellen Bildes eines leuchtenden Punktes (18) und die minimale Verschiebung desselben (19) bestimmen. Diese beide Resultate hängen von der Dicke und dem Brechungsindex der Platte ab und sind für jede Platte konstant. Diese beiden Konstanten spielen bei der verschiedenen Anwendung der planparallelen Platte eine Rolle. Z. B. bei mikroskopischen Untersuchungen die Deckplatte, bei der Photographie der Lichtfilter, bei dem Glasspiegel die Glasplatte.